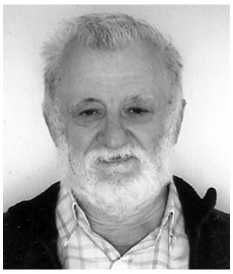
UDC 51-78:781

Природне науке / Natural sciences
Оригиналан научни рад / Original scientific paper

Математика на виолинској жици

Mathematics on the violin string



Милош С. Чанак, професор

Државни универзитет у Новом Пазару,
Департман за математичке науке
Вука Караџића бб, 36300 Нови Пазар
mcanak@np.ac.rs

Miloš S. Čanak, Professor

State University of Novi Pazar,
Department of Mathematical Sciences
Vuka Karadžića bb, 36300 Novi Pazar
mcanak@np.ac.rs

Key words:
аликвотни тонови, флажолетна техника, виолинска жица, теорија осцилација, негативне димензије, ламбдома, логаритамске спирале, регуларни и сингуларни тонови

Сажетак

У овом раду је први пут учињена подела тонова на жици виолине и других гудачких инструмената на регуларне и сингуларне, према начину њиховог производјења и месту на жици где се то чини. Пронађен је тзв. „фундаментални низ тонова негативних димензија", који се не понаша према основном закону: $f = \frac{k}{l}$ (1), већ према новоизведеним формулама (2) и (3). Са овим феноменом упознат је сваки школовани виолиниста из сопствене музичке праксе, али најчешће не обраћа пажњу на одговарајуће математичко значење.

Развија се једна музичко-акустичка теорија паралелна математичкој теорији Фуријеових редова. Значајно је да управо сингуларни тонови омогућују дефинисање и увид у негативне димензије, као и димензије разломљеног и ирационалног реда.

Занимљиво је да је исвиравање негативних димензија чулно опажајно, али то ипак није познато многим математичарима. Са друге стране, музичари су добро упознати са овом чињеницом. Да би се схватили овакви суптилни феномени, нужна је синтеза математичког расуђивања и музичке креативности.

Рад примљен: 12.9.2016.
Paper received: 9/12/2016

Рад прихваћен: 25.10.2016.
Paper accepted: 10/25/2016

Key words:
harmonics, flageolet technique, violin string, oscillation theory, negative dimensions, lambdoma, logarithm spiral, regular and singular tones

Abstract

For the first time in this piece of work there has been made a division of tones of the violin and other string instruments, to regular and singular tones, according to the way they are generated and the place on a string. There has been also found so called “fundamental tone row of negative dimensions”, which does not comply with the basic law: $f=\frac{k}{l}$ (1), but to new formulas (2) and (3). Every educated violinist is familiar with this phenomenon from their music practice, but most often they do not pay attention to a corresponding mathematical meaning.

A certain musical-acoustic theory parallel to the mathematical theory of Fourier’s works, is being developed. What is important is that the very singular tones enable definition and insight into negative dimensions, as well as into dimensions of fractal and irrational order.

The interesting fact is that playing negative dimensions can be perceived by senses, and yet, a large number of mathematicians are not familiar with it. On the other hand, musicians are very well familiar with this fact. To understand these subtle phenomena, synthesis of mathematical judgment and musical creativity is necessary.

I

Велики математичар Леополд Кронекер је 1886. године на Конгресу у Берлину изјавио: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“ (Целе бројеве је створио Бог, а све остало је дело људских руку) [1]. С друге стране, кинески филозоф Ли Пу Ве из 3. века пре Христа рекао је да о музици „може говорити само са човеком који је схватио суштину света“. Покушаћемо да доведемо у везу те две изјаве између којих је размак од 2200 година.

Споменимо најпре да у уводу свог рада „Лечење и здравље у музици и хармонији“ [2] Вермер Шулце цитира Ли Пу Веа.

„Све што је просторно има звук.
Тон настаје из хармоније.
Хармонија настаје из усаглашености.
Хармонија и усаглашеност су корени, из којих се развија музика, коју су утврдили стари краљеви.“

(„Пролеће и јесен“ Ли Пу Веа,
3. век пре Христа, књига III, поглавље 5)

У истом раду Шулце наводи и следеће податке.

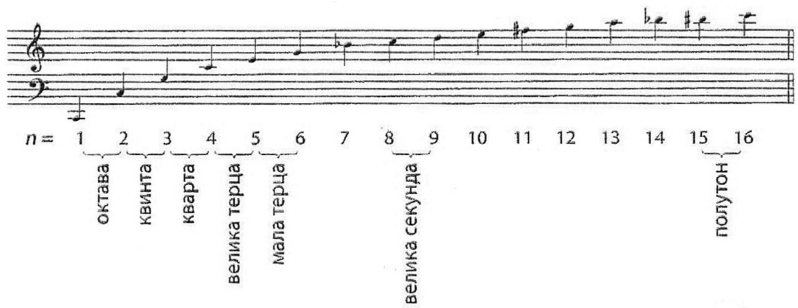
Ли Пу Ве је живео у 3. веку пре Христа у Кини, у време политичке нестабилности. Био је трговац-гросиста и у блиској вези са династијом Чин, која је тада доживљавала процват. Његових 26 књига „Пролеће и јесен“ завршене су 239. године [3].

Ли Пу Ве описује тонски систем као феномен високе културе, као предмет знања које се рефлектује и ставља овај тонски систем, који се налази на високом ступњу развоја, у однос према миту о настајању музике и утврђивању 12 лија. Ли је полутонски интервал, али и принцип, мера, норма (logos). Даје се једна обимна аналогија метафизике, симболике, мерног система, човека и музике. Музика се слаже са прасупротношћу битисања (јанг/јин): мушки принцип (јанг) и женски (јин) утемељени су у тонском систему.

Правило рачунања које је дао Ли Пу Ве претпоставља систем бројева који се базира на бројци 9 (9 као фактор множења). Овај систем полази од једне основне дужине која одговара дужини 81 узастопно поређаног зрна пшенице. „Поступком клацкалице“ добио је меру за дужину (ли) разних дужина бамбусове цеви: једанпут „израда од горе“ (shang sheng: од дуже фруле прави се једна краћа), онда опет иде „израда од доле“ (shia sheng: из краће цеви се израчунава једна дужа). Питагорејци су експериментисали са дужинама жица, што се принципијелно не разликује од кинеског поступка са дужинама цеви. Овај поступак клацкалице квинта – кварта, опис 12 фрула тонске лествице и на крају добијених пет изабраних тонова опширно је описао Марсел Гране (Marcel Granet) [4].

Основни принцип дијалектике гласи да се све што запажамо у природи и друштву, око нас и у нама, развија, мења и креће. Ми ћемо, међутим, обратити посебну пажњу на једну природну појаву која као да од искона пркоси основном принципу дијалектике, а с друге стране објашњава речи Кронекера.

Познато је да сваки музички тон представља сложену звучну појаву. У звуку сваког тона садржани су и његови тзв. аликвотни тонови, чије се фреквенције односе према тону у којем се појављују, тј. основном тону као 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 итд. Тако су, на пример, у тону c̲ садржани следећи аликвотни тонови:



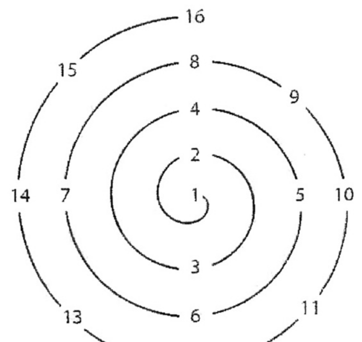
Слика 1.

Аликвотне тонове не разабирамо слухом као самосталне тонове, него само као призвуке, односно боју главног, основног тона. Слика или дијаграм односа тих тонова зове се звучни спектар, а могу се регистровати тзв. Хелмхолцовим резонаторима, којима је и утврђено њихово постојање. Врло је важно поменути да се низ аликвотних тонова може испровоцирати и учинити чујним тзв. флажолетном техником, где се приликом свирања на одређеном месту жица само лагано дотакне уместо да се чврсто притисне, услед чега настаје специфична боја тона.

Видимо дакле да је још од најдавнијих времена, од када је човек производио музику било својим гласом било на неком од првобитних музичких инструмената, у основи сваког тона лежао и лежи низ природних бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... и то управо онај који нам је, према речима Кронекера, подарио драги Бог. Њихове реципрочне вредности образују тзв. хармонијски низ 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 итд., за чији назив постоји више разлога. Прво, ови тонови у акустици често носе назив хармоници, а сами бројеви тачно означавају део жице одређен притиском прста. Затим, сваки члан овог низа представља хармонијску средину два њему суседна члана, која се израчунава по формули:

$$H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}.$$

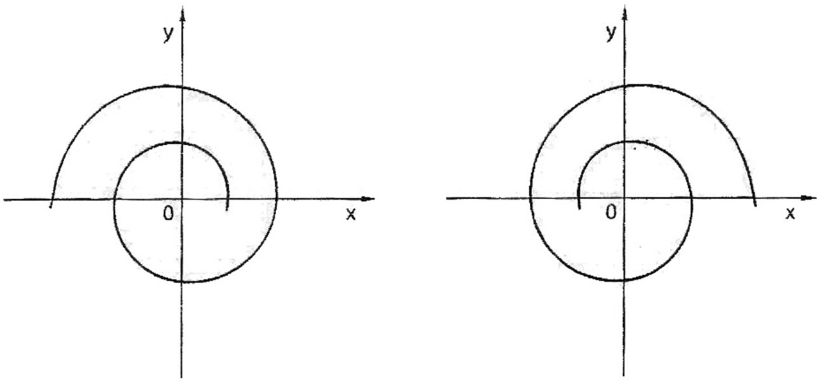
Низ аликвотних тонова односно хармонијски низ фасцинирао је све праве истраживаче науке о хармонији, који су у њему доживљавали један од основних прафеномена универзума и откривали различита и вишеслојна значења. Познати немачки хармоничар Петер Нојбекер спонтано је и интуитивно представио аликвотни низ у облику једне спирале (слика 2), при чему свака октава означава један нов циклус, и затим је то довео у везу са библијском *Књигом постања* [5].



Слика 2.

Са друге стране, интересантно је да се аликвотни тонови обилато користе у терапији музиком [6].

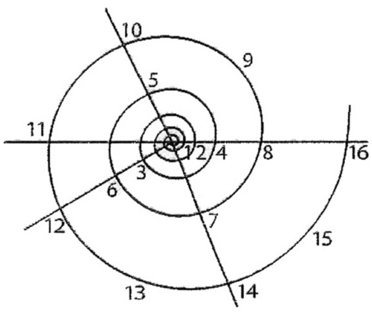
Чувени швајцарски математичар Јакоб Бернули (1654–1705) проучавао је већи број кривих линија чије се једначине изражавају у поларним координатама, а највећу пажњу притом посветио је логаритамској спирали, одређеној једначином $\rho=e^{a\theta}$ (a≠0). Ако поларни угао θ узима вредности које образују аритметичку прогресију 0, θ, 2θ, 3θ, 4θ... онда одговарајуће вредности потега чине геометријску прогресију 1, ρ, ρ^2, ρ^3, ρ^4... На слици 3 приказан је график ове криве за a>0 и a<0.



Слика 3.

Постоји велики број занимљивих особина ове криве које су фасцинирале Бернулија. Многе од њих наведене су у [7]. Али ова чудесна спирала свакако има најснажније изражено музичко значење.

Ако изаберемо $a = \frac{ln2}{360}$, добићемо један специјалан облик логаритамске спирале $\rho = e^{\frac{ln2}{360}\theta}$, коју ћемо назвати октавна или Нојбекерова спирала. Она сече поларну осу у тачкама 1, 2, 4, 8... које одговарају узастопним октавама (види слику 4).



Слика 4.

То даље значи да интервал [0, 1] може да се замисли као жица музичког инструмента, при чему тачка 1 означава почетак жице. Идући по спирали „ка унутра" добијамо пресеке с поларном осом у тачкама 1/2, 1/4, 1/8, 1/16... које тачно одговарају узастопним октавама на жици.

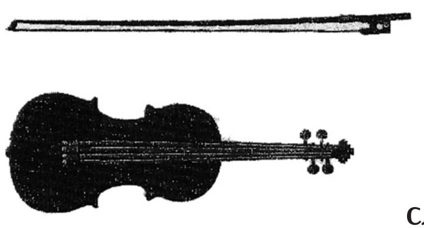
Да бисмо даље могли да пратимо излагање, наведимо цитат са почетка књиге „Пут у пету димензију" [8]:

„Може ли четворо различитих бити истовремено у истој тачки, а један исти бити истовремено у четири различите тачке? Да, то је могуће када уђете у пету димензију".

Замислимо да професор из Парцијалних диференцијалних једначина постави студенту питање: „Једначина жице која трепери", и очекује одговор сличан ономе из важећих уџбеника. Студент би могао одмах да га „смрзне" контрапитањем: „Професоре, морате ми најпре рећи да ли сте мислили на жицу виолине, жицу клавира или жицу за сушење веша?"

Неће сваки професор парцијалних диференцијалних једначина знати одговор на ово врло смислено питање. Клавир и виолина су вероватно два најпопуларнија инструмента у класичној музици и оба су жичана, али су разлике између њих суштинске и дубоке. Погледајмо њихове слике:

Слика 5.



Слика 6.

Прва и основна разлика је у приступу њиховим жицама. Пијаниста нема директан контакт са жицама, већ звук производи преко дирки и преносног механизма. Жице су смештене у унутрашњост клавира и свака може да произведе само један тон.

Код виолине постоји директан контакт извођача и жице (слика 6). Извођач прстима леве руке притиска по жици и одређује висину тона, а десном руком, превлачењем гудала преко жице, производи тон. Колико се онда тонова може произвести на виолинској жици?

Мало је рећи бесконачно много! Јер ако на жици изаберемо један интервал [*a*, *b*], ($0 \leq a \leq b$) и посматрамо га као интервал на реалној бројној оси, онда свакој тачки одговара један тон, а сваком тону један реалан позитиван број – његова фреквенција. То значи да на виолинској жици можемо произвести континуум много различитих тонова. Ипак, нисмо их још ни близу све открили.

Посматрајмо затим другу појаву, кад виолиниста вежба скале на жици. После извођења осам тонова прве октаве његов прст ће се наћи на половини жице, а после извођења друге, прећи ће још половину од половине, тј. укупно три четвртине жице. Посматрач схвата основни закон музичког кретања по жици, познат још старим питагорејцима на основу њиховог експериментисања на монокорду, да се приликом приближавања крају жице одговарајући размаци на жици смањују.

Дакле, прва половина жице резервисана је за тонове прве октаве. Друга октава распоређена је на половини преостале половине, а свака следећа октава заузима упола мањи простор од претходне. Сва октавна растојања, као и растојања између узастопних тонова, тј. полустепена, различита су и смањују се по геометријској прогресији. Ово се још боље види на гитари (слика 7), где су прагови који раздвајају поједине тонове и визуелно уочљиви. То значи да се, теоријски гледано, на једној жици може сместити бесконачно много тонова скале и чак бесконачно много октава. Али из техничко-извођачких разлога и ограничења нашег слушног апарата ми, наравно, користимо само коначан број.

Слика 7.

Виолинисти није свеједно на ком делу жице изводи тонове. Што је растојање од почетка жице веће, то је размак између прстију мањи, отпор жице се повећава и јављају се и проблеми интонације. Пијаниста нема овај проблем и не може да свира нечисто јер му то не дозвољава инструмент, док је код виолинисте то сасвим могуће.

Виолиниста дакле иде по жици свирајући низ лествичних тонова и смањује растојање до краја жице на 1/2, 1/4, 1/8 или 1/16 њене дужине. Њему је јасно да никада не може достићи крај жице јер на путу треба да савлада све могуће октаве, а њих има бесконачно много. Уосталом, за жицу музичког инструмента важи физички закон:

$$f = \frac{k}{l} \quad ,$$

тј. да је фреквенција тона обрнуто пропорционална дужини жице (*k* – коефицијент пропорционалности), те да се у крајњој тачки она бесконачно увећава. Ова тачка је за извођача на музичком инструменту очигледно недостижна, мада је свако може видети и дотаћи.

II

У математици се веома много изучавају разни бројни скупови (природни, цели, рационални, ирационални, реални и комплексни бројеви) и рачунске операције с њима.

Важну улогу игра дуалност рационално – ирационално. Као што скуп реалних бројева можемо поделити на рационалне и ирационалне, исто је и с музичком реалношћу на виолинској жици. Музички репрезентант (представник) за рационалне бројеве су природни тонски систем и природни флажолетни тонови, а репрезентант за ирационалне бројеве су хроматско темперовани тонски систем и вештачки флажолетни тонови. Разлику између природних и вештачких флажолета тек ћемо објаснити.

Рационални и ирационални бројеви су равноправни и они морају да коегзистирају у царству реалних бројева. Слично важи и у музици. Природни и темперовани тонски системи су равноправни и морају да коегзистирају у царству живе музике. А шта је с природним и вештачким флажолетима?

За природне флажолете важе речи Кронекера, да нам их је подарио драги Бог. Објашњење за ово води нас до тзв. „ламбдоме“, једног од најважнијих појмова и симбола науке о хармонији (види [9]).

Ламбдома је бројна схема с две колоне које стоје једна према другој у облику великог грчког слова ламбда (Λ, λ), при чему се један крак састоји од природних бројева, а други од њихових реципрочних вредности (слика 8).

	1	
1/2		2
1/3		3
1/4		4
1/5		5

Слика 8.

Корени ове схеме леже још у новопитагорејству и код Никомаха из Геразе (прва половина 2. века) она је добила своје аритметичко и музичко значење. Тешко је рећи ко је први дошао на идеју да је ротира за 45° и попуни рационалним бројевима као на слици 9.

Зна се да су ову схему познавали Рајмунд Лули (око 1232–1316) и Никола Кузански (1401–1461), а да ју је Готфрид Вилхелм Лајбниц (1646–1716) примењивао за приказивање родословља паса. Иста та схема данас се користи у многим уџбеницима да би се показало да је скуп рационалних

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1 ...
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2 ...
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3 ...
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4 ...
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5 ...
...	...	...	...	...

Слика 9.

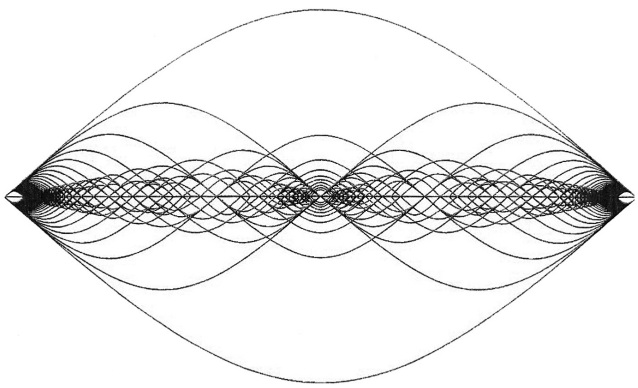
бројева пребројив, тј. да се може уредити у бројни низ. Још је јасније ако се уређење врши по генерацијама. Родоначелник је, наравно, број 1/1 у горњем левом углу, а прву генерацију чине разломци чији је збир бројиоца и имениоца 3, дакле 1/2 и 2/1. На исти начин другу генерацију чине разломци 1/3, 2/2 и 3/1 код којих је збир цифара 4, а у општем случају *n*-ту генерацију чини (*n + 1*) разломака са збиром бројиоца и имениоца (*n + 2*). Генерације су, дакле, смештене по косим паралелним линијама, а свака следећа има по један члан више од претходне. Уређење рационалних бројева у низ врши се тако што се слаже генерација за генерацијом и притом одбацују они разломци чија се бројна вредност већ једном појавила. На пример, разломци 2/4 и 3/6 из пете, односно осме генерације покривени су разломком 1/2 из прве.

Многобројни аспекти и примене ламбдоме могу се наћи у студији А. Крамера [10].

Већ смо видели да су у звуку сваког тона садржани и његови природни аликвотни тонови („природни“ значи природно структурирани на жици) чије се фреквенције односе према тону у којем се појављују, тј. основном тону, као 1 : 2 : 3 : 4 : 5... Овом приликом откривамо да је сасвим непотпуно објашњење по коме жицу поредимо с бројном осом, тако да свакој тачки одговара један тон или број, који представља дужину жице или тонску фреквенцију. Ситуација је много сложенија и жица музичког инструмента заправо представља читав један математичко-музички универзум. Пресликавање уопште није узајамно једнозначно као код бројне осе. Неком изгледа необично, али у једној тачки жице може да се произведе више различитих тонова, а у више различитих тачака може да се добије један исти тон. Ако, на пример, жицу притиснемо нормално на једној трећини њене дужине, добићемо квинту основног тона, а ако то исто урадимо природном флажолетном техником, лаганим додиром прста у истој тачки, добићемо тон за октаву виши.

С друге стране, ако жицу поделимо на пет једнаких делова, тада у четири подеоне тачке природном флажолетном техником можемо произвести један исти тон, који је за две октаве и терцу виши од основног.

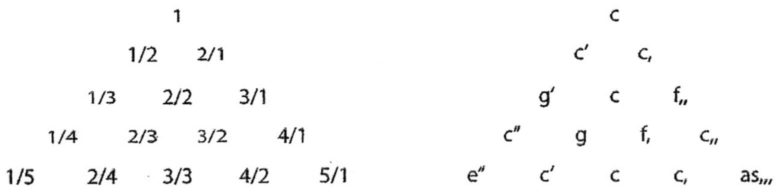
Сетимо се цитата са стр. 462, ред 32! Управо кад смо исти тон произвели на четири различита места на жици, ми смо боравили у петој димензији. Ово ћемо касније још боље показати.



Слика 10.

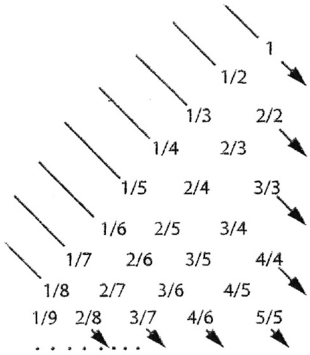
Жица која трепери приказана је на слици 10 (детаљније објашњење ове слике видети у [8]). На њој, поред треперења целе дужине, уочавамо и треперење појединих делова – две половине, три трећине, четири четвртине итд. Ова слика потпуно одговара бројној схеми ламбдоме на приказу 9.

Сваком разломку можемо придружити одговарајући тон у односу на основни тон c коме одговара 1/1. Хармонијски низ разломака левог крака одговара низу аликвотних тонова (тј. низу одговарајућих дужина делова жице), док су све бројне вредности на главној вертикалној колони једнаке 1 и одговарају тону c. Због тога се ова колона назива и тонска генератриса јер полази из основног тона c, тј. генераторног тона ламбдоме. (Можемо саставити и тонску ламбдому ако је генераторни тон g, тако што ћемо све тонове у предњој шеми транспоновати за квинту навише).



Слика 11.

Посматрајући ламбдому на слици 11 у бројном или тонском облику, припремићемо терен за улазак у више димензије. Пресећи ћемо је (као маказама) дуж тонске генератрисе и посматрати леву половину (слика 12). Одмах уочавамо косе, међусобно паралелне линије, сачињене од разломака с истим имениоцем.



Слика 12.

Ове линије су кључ наше приче и пут у више димензије преко жице музичког инструмента. Првој димензији одговара основно треперење празне жице, тј. {1}. Другој димензији {1/2, 2/2} одговара флажолетни тон октаве. Свакој димензији одговара по једна димензиона линија са слике 12, а заједнички именилац разломка на тој линији одређује о којој димензији се ради.

Ово би се могло сматрати музичком дефиницијом димензије. У књизи [8] показано је да је она у потпуној сагласности са математичком димензионалношћу у Фуријеовој анализи, при чему *n*-том коефицијенту Фуријеовог реда одговара енергија *n*-тог аликвотног тона музичког инструмента.

III

У матричном рачуну позната је подела матрица на „регуларне" и „сингуларне". Дуалитет регуларно – сингуларно присутан је у многим областима математике и других наука. Интуитивно, под речју „регуларно" подразумевамо нешто што се понаша правилно, регуларно и предвидљиво, док код „сингуларног" можемо стално очекивати изненађења. Ипак, изненађења и сингуларитети су со живота – без њих би живот био празан. Тако је очигледно мислио и маестро Паганини.

Када се нормално превлачи гудалом по жици, сматра се да је виолина и створена за такав начин музицирања. Овако добијене тонове, уз чврст притисак жице прстом на одређеном месту, зваћемо регуларни тонови. Свакој тачки на виолинској жици одговара тачно један регуларни тон, а сваком регуларном тону одговара тачно једна тачка на жици. На једној жици може се произвести бесконачно много различитих регуларних тонова (или прецизније континуум много).

На датој жици и на њеним тачно одређеним местима могу се производити природни флажолетни тонови. А може ли се мењати сама жица, тако да је сада једна, у следећем тренутку друга, а нешто касније трећа? Личи на чаролију, али и то је могуће „техником вештачких флажолета".

Код ове технике видимо да се нешто битно мења у односу на саму жицу, и да је то што се мења дело људских руку и људске памети, па отуд и реч „вештачки". Неки тврде да је вештачке флажолете пронашао сам Паганини, али ко год да их је измислио – добро је то урадио. По техничкој супериорности, маштовитости и неочекиваним музичким решењима, Паганини је био некрунисани краљ свих флажолета, који су доводили публику до усхићења.

У пракси се најчешће користе квартни флажолети, али постоје и други. О музичким, математичким и мистичким аспектима природних и вештачких флажолета сигурно би се могла написати читава књига, али ми ћемо дати само кратак опис.

Код настајања вештачког квартног флажолета основна идеја је „премошћавање", а улогу „моста" има кажипрст леве руке. Тим кажипрстом притиснемо нпр. тон As на почетку <u>G</u> жице и држимо га чврсто на том месту. Тиме смо жицу <u>G</u> претворили у жицу <u>As,</u> која иначе не постоји на виолини. У другом делу операције малим прстом лагано дотакнемо место где би се регуларном техником добио регуларан тон des. Међутим, техником вештачког флажолета добија се тон As за две октаве виши од оног дефинисаног кажипрстом.

Значи, код вештачког флажолета морају да учествују два прста. Кажипрст гради мост и дефинише „вештачку жицу", а мали прст на њој производи саме вештачке флажолете.

Сада је могуће експериментисање и музицирање у два правца.

Могуће је неку мелодију одсвирати техником вештачких флажолета као контраст исте, регуларно изведене мелодије. Паганини је то радио великом брзином и ненадмашном вештином.

Супротно овоме било би експериментисање у коме се мали прст задржи на истом месту, а осталим прстима пипа по околини. Као што миноловац претражује и налази скривене мине, тако и вешт виолиниста на малом простору открива велики број вештачких и природних флажолета.

У потрази за границама људских могућности Маестро није дозволио да се прича на овоме заврши. Тако су настали двоструки флажолети, тј. истовремено исвиравање природних и вештачких флажолета на две суседне жице. Овај изузетно сложен и деликатан посао резервисан је само за врхунске виртуозе и захтева спретно коришћење више прстију истовремено. Ако је за извођење природног флажолета потребан један, а за извођење вештачког два прста, израчунајте сами колико треба прстију за двоструки флажолет. При томе, у сазвучју могу да учествују два природна, један природан и један вештачки или оба вештачка флажолета.

Извођење је тешко, али је резултат вредан труда. Звуци који се добијају могу да подсећају на лагано звоњење и сударање малих кристала, који стварају фине неземаљске хармоније и боје. Ови тонови не личе на регуларне тонове виолине. Слушаоци Паганинијевог првог виолинског концерта, када наиђе део с двоструким флажолетима, бивају потпуно очарани.

На крају назовимо тонове произведене лаганим додиром прста техником природних или вештачких флажолета као сингуларне тонове, за разлику од регуларних, где прст чврсто притиска жицу. Разлика је, дакле, у контакту прста и жице (чврст притисак или благ додир).

IV

Позната је опширна математичка прича – теорија о конвергентним тригонометријским Фуријеовим редовима. Коришћењем појмова скаларног производа и ортогоналности (додуше уопштене) показује се да су ови редови бесконачно димензиони.

Али постоји и симболички паралелна прича – близанац, позната акустичарима, да сваком Фуријеовом развоју неке функције одговара разлагање тона неког музичког инструмента на основни тон и пратеће аликвотне тонове. Дакле, *математичка функција и музички инструмент су сестра и брат*. Сваком члану Фуријеовог развоја одговара један одређен аликвотни тон и једна димензија. Уз тригонометријски полином са *n* чланова иде у пакету *n* аликвотних тонова неког инструмента и *n* димензија.

Сваком виолинисти је познато да су аликвотни тонови који репрезентују димензије уграђени у звук основног тона (на пример g жице), али да се могу испровоцирати и одсвирати флажолетном техником у тачкама које им одговарају (слика 13).

Слика 13.

Прва димензија одговара исвиравању празне жице и тачки x_0. Друга димензија и тачка x_1 дају октаву основног тона. Трећа димензија и тачка x_2 дају квинту преко октаве. Затим се ређају остали тонови аликвотног низа x_3, x_4, x_5... којих у принципу има бесконачно много, па се зато овде ради о бесконачнодимензионом простору. Важној математичкој чињеници да низ Фуријеових коефицијената конвергира ка нули одговара исто тако важна музичка чињеница из приче – близанца да утицај виших аликвотних тонова постепено опада и нестаје.

На тај начин сматрамо да је решено питање димензија чији је ред природан број, укључујући и бесконачно димензионе просторе. Оне су природно структуриране на жици музичког инструмента. Низ тонова x_1, x_2, x_3,... x_n... на слици 13 назваћемо надаље фундаментални тонски димензиони аликвотни низ.

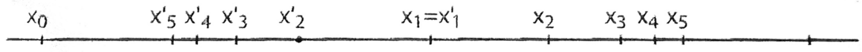
Али шта је са негативним димензијама? Уведимо следећу дефиницију!

Дефиниција 1: Ако једном бесконачно узлазном низу тачака на виолинској жици одговара узлазни низ тонова (као што је логично очекивати), тада је димензија тог низа позитивна, и ако узлазном низу тачака одговара силазни низ тонова, димензија је негативна.

Да ли је овако нешто уопште могуће и, ако јесте, где су се сакриле те негативне димензије? Зато је сада најважније:

1. пронаћи пример једног негативнодимензионог низа;
2. овај пример упоредити с одговарајућим позитивнодимензионим;
3. одсвирати овај пример и јасно се уверити да силажењу по жици одговара раст тонских висина.

Дакле, пример наравно постоји и представља исту виолинску жицу и исти низ тонова и тачака као на слици 13, само је та слика допуњена новим детаљима (слика 14).



Слика 14.

Онај тон који из себе генерише (изнедрава, производи) један бесконачан аликвотни низ тонова назваћемо генераторним тоном (родоначелником). На слици 13 генераторни тон је основни тон жице x_0 са фреквенцијом f_0, и одговарајући чланови низа су x_1, x_2, x_3, x_4, x_5... са фреквенцијама $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$... који дефинишу прву, другу, трећу, четврту и остале позитивне димензије жице.

Сада конструишимо на истој жици два симетрична низа тачака x_1, x_2, x_3, x_4, x_5... и x_1', x_2', x_3', x_4', x_5'... (слика 14). Тон $x_1 = x_1'$ јесте заједнички тон за оба низа, а тачке x_k' симетричне су тачкама x_k у односу на тачку $x_1 = x_1'$. Ми тврдимо да је низ тонова x_1', x_2', x_3', x_4'... x_k'... један од тражених негативнодимензионих низова. Главни део доказа је у исвиравању овог низа тонова и пажљивом паралелном праћењу оком и ухом шта се стварно дешава. Јасно се види да се при музичком кретању по тачкама низа прсти крећу силазно, ка почетку жице, а притом се чује како висина тонова расте. Ова истовремено супротна, привидно контрадикторна кретања су основа дефиниције негативних димензија.

Снагу доказа битно појачава једна акустичка чињеница са слике 14. Чланови низова $\{x_k\}$ и $\{x_k'\}$ истовремено су чворови осцилација жице. Само преко тих тачака и тих тонова може се наћи скривени пут у негативне димензије.

Због свог великог математичко – музичко – физичког значаја означимо низ тонова $\{x_k'\}$, укључујући и њима припадајуће тачке, „фундаменталним низом тонова негативних димензија на жици“. Зашто је у називу реч „фундаменталност“?

Да ли зато што је тај низ тонова (који се исвирава флажолетном техником) омогућио дефинисање негативних димензија с јасном физичком интерпретацијом и значењем? То је тачно, али има и нешто важније. У простору негативних димензија не морају важити физички закони простора у коме живимо (видети (1)).

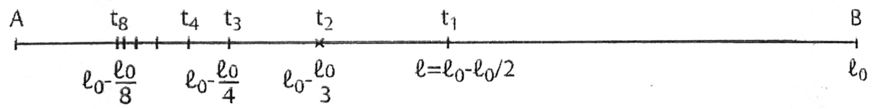
Закон је закон ако важи за све, или ако се тачно прецизира за кога важи. У свим уџбеницима физике за средње школе и факултете формулише се основни закон теорије осцилација жице, који тврди да је фреквенција било ког тона обрнуто пропорционална дужини дела жице која трепери, тј.

$$f = \frac{k}{l} \qquad (1),$$

где је k реалан број, коефицијент пропорционалности.

Ово не мора да буде тачно! И управо то не важи за фундаментални низ тонова негативних димензија. Овде се препоручује непосредна експериментална провера на виолинској жици.

Нека је l_0 дужина целе жице која производи тон t_0, а фреквенција тог тона f_0. Нека је даље t неки променљиви тон из фундаменталног низа тонова $\{t_k\}$ (слика 15),



Слика 15.

f фреквенција тог тона и l одговарајућа дужина дела жице. Она се увек рачуна са десне стране јер је то део жице која трепери.

За тачке овог низа не важи формула (1). Пратећи тачку по тачку и ноту по ноту низа можемо, као у основној школи, да саставимо следећу таблицу (обратити пажњу на рачунање дужина здесна).

l	$l_0 - \frac{l_0}{2}$	$l_0 - \frac{l_0}{4}$	$l_0 - \frac{l_0}{8}$	...
f	$2f_0$	$4f_0$	$8f_0$	...

Уз помоћ ове таблице могу се извести следеће формуле:

$$l = l_0\left(1 - \frac{f_0}{f}\right) \qquad (2),$$

$$f = \frac{f_0 \cdot l_0}{l_0 - l} \quad (3).$$

Видимо, на пример, да функција (2) није реципрочна, већ билинеарна. Из обе формуле видимо да $f \to \infty$ кад $l \to l_0$, тј. када се тонови фундаменталног низа и одговарајуће тачке приближавају почетку жице, тада се њихове фреквенције бесконачно увећавају. Ово даље значи да је и на почетку жице на неки начин присутна бесконачност (фреквенцијска), а не само на крају. Виолинска жица је истовремено и коначна и бесконачна, зависно од тачке гледишта.

Закључак

По нашем сазнању, у овом раду је први пут учињена подела тонова на жици на регуларне и сингуларне према начину њиховог произвођења и месту на жици где се то чини. За регуларне тонове важи: „У зависности од места на жици где си притиснуо прст, добићеш тачно одређен регуларан тон“. За сингуларне тонове важи: „Ако притиснеш једно, добићеш нешто друго“.

Затим смо пронашли тзв. „фундаментални низ тонова негативних димензија“ који се не понаша према закону (1), већ према формулама (2) и (3). Са овим феноменом упознат је сваки школовани виолиниста из сопствене музичке праксе, али најчешће не обраћа пажњу на одговарајуће математичко значење.

Да ли то значи да греше сви професори који предају на уобичајени начин (1) и сви уџбеници у којима тако пише?

Одговор је да не греше. Они подразумевају да се мисли само на регуларне тонове који се добијају уобичајеним превлачењем гудала преко жице, уз чврст притисак прста на одређеном месту. Али постоје и други начини, благи додир уместо чврстог притиска или комбинација првог и другог код техника природног и вештачког флажолета. Добро би било споменути на предавањима и у уџбеницима да постоје и такви тонски низови, такве музичке стазе и кретања (додуше сингуларна) за које закон (1) не важи. Ово тим више може бити важно, јер нам управо сингуларни тонови омогућавају увид у негативне димензије, као и димензије разломљеног и ирационалног реда.

Напомена: Ако нам је потребна $\frac{m}{n}$-та димензија, где су m, n цели бројеви и $n \neq 0$, треба пронаћи тачку којој одговара тон са фреквенцијом $\frac{m}{n} f_0$ и снажно је притиснути кажипрстом, па затим помоћу малог прста и технике вештачког флажолета извлачити тонове низа. Слично поступамо и ако нам је потребна $\sqrt{2}$-та димензија. Тада на жици проналазимо тон чија је фреквенција $\sqrt{2} f_0$, па поступамо на исти начин.

Summary

The basis of this work is the division of violin string tones to regular and singular. The division comes from different ways of generating tones; by a firm finger pressure at any point on a string, or a slight touch at the points of oscillation nodes. Practically, singular tones occur by using natural and artificial flageolets.

Some mathematical books say that instrument strings can be compared to numeric axes, so that every point corresponds to one tone or a number, which represents string length or tonal frequency. This can only be applied to regular tones, while the situation is otherwise much more complicated, and the string of a musical instrument represents an entire mathematical-musical universe. Comparison is not at all mutually single-valued, as with the numeric axes. It looks unusual to someone, but at one point on a string various tones can be produced, and at different points the same tone can be produced.

Great importance of singular tones comes from the fact that, with their help, negative dimensions, as well as the ones of fractal and irrational order, can be defined in the exact way, perceived by senses.

All of the aforementioned has systematically been organized into 4 chapters:

In the first chapter, musical-acoustic phenomenon of harmonics on a violin string and

its mathematical interpretation through logarithmic spiral have been explained. Let us get to know each other with an interesting phenomenon that, to a violinist, it is not all the same at which part of the string he plays. The bigger the distance from the string's beginning, the smaller the space between fingers, string resistance increases and problems with intonation occur.

In the second chapter, we encounter one of the most important concepts, and the symbol of science harmony, so called "lambdoma", and its meaning in music. With its help, we perceive another interesting phenomenon, that at one point of the violin string several different tones can be produced, whereas the same tone can be produced at different points. Moreover, lambdoma enables us to define dimensions of the violin string, which are in complete accordance with mathematical understanding of dimensions according to Joseph Fourier.

Further consideration leads us to the third chapter, where we have division of tones to "regular" and "singular", according to the manner of their production of the string.

In the fourth chapter is shown the extent to which this division is justified, where negative dimensions that can be perceived by senses are explained exactly by singular tones. The dimensions show us the third, and most interesting, phenomenon where sight seems to contradict hearing. The so called "fundamental tone row of negative dimensions on a string" has been found, and any educated violinist can learn to play it by using flageolet technique. During its performance, the eyes can clearly see that the finger are going down the string (going back to a starting point), and the ears perceive increasing pitch.

Литература

1. Чанак, М. (2009). *Математика и музика*. Београд: Завод за уџбенике.
2. Шулце, В. (1998). Лечење и здравље у музици и хармонији. *Флогистон*, 7, 357-392.
3. Wilhelm, R. (прев. и приред.) (1979). *Пролеће и јесен Ли Пу Веа*. Диселдорф–Келн.
4. Granet, M. (1963). *Кинеско мишљење*. Минхен, 155.
5. Neubäcker, P. (1990). *Symbolische Inhalte der mathematisch – musikalischen Beziehungen in der Pythagoräishen Harmonik*. Wien: Festgabe für Rudolf Haase zum 70. Geburststag, 56-74.
6. Timmerman, T. (1989). *Das Monochord. Eine Wiederentdeckung Musiktherapeutische Umschau*. Stuttgart: Universität, Ulm. Bd. 10, H. 4, S. 308 n. 315-320.
7. Maor, E. (1996). *Die Zahh e - Geschichte und Geschichten*. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser.
8. Чанак, М. (2013). *Пут у пету димензију*. Београд: Завод за уџбенике.
9. Нојбекер, П., Чанак, М. (1998). Хармонија у правилним многоугловима и бројним мандалама. *Флогистон*, 7, 327-346.
10. Krammer, A. (1990). *Harmonik – Mathematik – Metaphysik. Das Lambdoma in Beziehung zu anderen Zahlentafeln*. Innsbruck: Institut für allgemeine Biologie, Biochemie und Biophysik an der Universität Salzburg. Grenzgebiete der Wissenschaft, Jg. 39, H. 1, S. 45-64, H. 2, S. 123-139.